ＭＡ　Hoermander　多変数複素解析を読む　講義報告[5]

２００８年7月１２日（土）　１４：００−１６：００

正則関数の最大絶対値の定理から、$Schwarz$ の補題を導き、$Schwarz$ の補題から、$Osgood$ の定理を証明した。次に、多重円板における非斉次 Cauchy - Riemann 方程式について扱った。

補題 1.2. $r \geq 0$ が与えられているとき、

$$u = f(z) = \frac{r(z-\xi)}{r^2 - \bar{\xi}z} \quad \xi \in \Delta(0,r)$$

は $\Delta(0,r)$ から $\Delta(0,1)$ への正則同型で、特に $f(\xi) = 0$

補題 1.3 ($Schwarz$ の補題). $f \in \mathcal{A}(\Delta(0,r)),\ f(0) = 0$ でかつ、 $|f(z)| \leq M\ (z \in \Delta(0,r))$ ならば、

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{r} \quad for\ \forall z \in \Delta(0,r)$$

特に、$f \in \mathcal{A}(\Delta(0,r)),\ f(0) = 0$ でかつ、 $f(z) \in \Delta(0,1)$ ならば、

$$|f(z)| \leq |z| \quad for\ \forall z \in \Delta(0,1)$$

補題 1.4. $f \in \mathcal{A}(\Delta(0,r)),\ |f(z)| \leq M\ (\forall z \in \Delta(0,r))$ ならば、

$$|f(z) - f(\xi)| \leq 2Mr\left|\frac{z-\xi}{r^2 - \bar{\xi}z}\right| \quad for\ \forall z, \xi \in \Delta(0,r)$$

定理 1.14 ($Osgood$ の定理). $\overline{\Delta}(\vec{c}, \vec{r})$ の近傍で定義された関数 f が変数毎に正則で、かつ、$\overline{\Delta}(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}})$ で有界ならば、$f \in \mathcal{A}(\overline{\Delta}(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}})),\ f \in C^\infty(\overline{\Delta}(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}}))$

定理 1.15 ($Hastogs$ の定理). $\overline{\Delta}(\vec{c}, \vec{r})$ の近傍で定義された関数 f が変数毎に正則ならば、$f \in \mathcal{A}(\overline{\Delta}(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}})),\ f \in C^\infty(\overline{\Delta}(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}}))$

1.3　多重円板における非斉次 Cauchy - Riemann 方程式

$f = \sum_{j=1}^n f_j d\overline{z}_j$ は $\mathbb{C}^n$ 上の $Compact\ support$ をもつ $(0,1)$ 形式で、u を未知関数とするとき、方程式

$$\overline{\partial} u = f$$

を考える。

定理 1.16. $f_j \in C_0^l(\mathbb{C}^n)\ (j = 1, 2, \cdots, n),\ l > 0$ が

$$\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}_j} \quad j, k = 1, 2, \cdots, n$$

を満たすとき、

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k} = f_k \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

を満たす $u \in C_0^l(\mathbb{C}^n)$ が存在する。

[5]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

補題 1.5 (一変数の非斉次 Cauchy - Riemann 方程式の解). $\varphi \in C_0^l(\mathbb{C})$ に対して、

$$\hat{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

とおくと、$\hat{\varphi} \in C_0^l(\mathbb{C})$ でかつ、$\hat{\varphi}$ は $\mathbb{C} \setminus supp\ \varphi$ で正則で、

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \bar{z}} = \varphi$$

を満たす。

記録　by　J.S